第6讲 特殊的高次方程的解法

**课前思考**

以下哪些方程与，具有共同的特点？

(1)； (2)； (3)；

(4)； (5).

这类方程有什么共同的特点？

**知识梳理**

**1.双二次方程**

**(1)概念：**只含有未知数的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的一元四次方程叫做双二次方程.

**(2)一般形式：***ax*4+*bx*2+*c*=0(*a*≠0).

**(3)解双二次方程：**求解的思想方法是“降次”，通过换元把它转化为一元二次方程.

可以用新未知数*y*代替方程中的*x*2，同时用*y*2代替*x*4，将这个方程转化为关于*y*的一元二次方程*ay*2+*by*+*c*=0，通过换元达到“降次”的目的，称为“换元”法.然后解关于新元*y*的一元二次方程，最后“回代”求出*x*.

**(4)双二次方程的根的个数**

当Δ≥0时，如果*y*1*y*2<0，那么原方程有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_实数根，且互为相反数；

如果*y*1*y*2>0且*y*1+*y*2>0，那么原方程有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_实数根，且是两对互为相反数的根；

如果*y*1*y*2>0且*y*1+*y*2<0，那么原方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_实数根.

当Δ<0时，原方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_实数根.

**1.双二次方程**

**(1)概念：**只含有未知数的偶次项的一元四次方程叫做双二次方程。

**(2)一般形式：***ax*4+*bx*2+*c*=0(*a*≠0).

**(3)双二次方程的解：**求解的思想方法是“降次”，通过换元把它转化为一元二次方程.

可以用新未知数*y*代替方程中的*x*2，同时用*y*2代替*x*4，将这个方程转化为关于*y*的一元二次方程*ay*2+*by*+*c*=0，通过换元达到“降次”的目的，称为“换元”法。然后解关于新元*y*的一元二次方程，最后“回代”求出*x*。

**(4)双二次方程的根的个数**

当Δ≥0时，如果*y*1*y*2<0，那么原方程有两个实数根，且互为相反数；

如果*y*1*y*2>0且*y*1+*y*2>0，那么原方程有四个实数根，且是两对互为相反数的根；

如果*y*1*y*2>0且*y*1+*y*2<0，那么原方程没有实数根.

当Δ<0时，原方程没有实数根.

[说明]因为双二次方程能转化为一元二次方程，所以判断双二次方程的根的个数问题实际上就转化为判断一元二次方程根的个数问题，学生就很容易联想到根的判别式△，结合*x*2本身是个非负数，考虑在实数范围内解的情况.韦达定理在这里的应用是一个难点，可以更深刻地帮助学生理解双二次方程与一元二次方程的关系.

**2.其他简单高次方程的解法**

初中常见的高次方程基本上都是三次、四次，解这些方程的主要数学思想是转化：把高次方程“降次”，转化为一元二次或一元一次方程，从而求解.

降次的方法主要有：“开方”、“分解因式”、“配方”、“换元”.

**典型解析**

**例1：**判断下列方程是不是双二次方程，如果是，求出它的根：

(1)*x*4-9*x*2+14=0； (2)*x*4+10*x*+25=0； (3)2*x*4-7*x*3-4=0； (4)*x*4+9*x*2+20=0.

**【变式训练】**

(1)已知关于*x*的方程*x*4+(*n*+1)*x*3+2*x*2+*mx*+2=0是双二次方程，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：0；-1

(2)请写出一个关于*x*的既是双二次方程，又是二项方程的方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：如*x*4=1

**例2：**不解方程，判断下列方程的根的个数：

①； ②；

③； ④.

分析：令

①△>0，*y*1*y*2>0，*y*1+*y*2>0 ∴原方程有四个实数根.

②△>0，*y*1*y*2<0，*y*1+*y*2>0 ∴原方程有两个实数根.

③△<0 ∴原方程没有实数根.

④△>0，*y*1*y*2>0， *y*1+*y*2<0 ∴原方程没有实数根.

**【变式训练】**

(1)下列关于*x*的双二次方程中，没有实数根的方程是( ).

答案：C

(2)已知双二次方程*ax*4+*bx*2+*c*=0有四个实数根，那么这四个实数根之和为( ).

(A)0 (B)4 (C)-4 (D)无法确定

答案：A

(3)关于*x*的双二次方程2*x*4+*x*2-3=0的实根的个数为( ).

(A)0 (B)2 (C)4 (D)无法确定

答案：B

**例3：**解关于*x*的方程：

答案：(1)*x*=±2；(2)*x*=±1或±；(3)*x*1=*x*2=0；(4)*x*1=*x*2=0

**例4：**解方程：(2*x*2-3*x*+1)2=22*x*2-33*x*+1.

**满分解答：**设2*x*2-3*x*=*a*，则原式为(*a*+1)2=11*a*+1，

*a*2+2*a*+1=11*a*+1，

*a*2-9*a*=0，*a*·(*a*-9)=0；因此，*a*=0或*a*-9=0.

当*a*=0时，2*x*2-3*x*=0，*x*=0或；当*a*-9=0时，2*x*2-3*x*-9=0，*x*=或*x*=3；

所以方程的解是*x*=0或或*x*=3.

**技巧贴士：**

当看到题目中有相似的部分或重复出现的部分时，可以试用换元法来进行计算.另外，换元法一般都是为了降次，所以换元法适用于高次方程.与此同时，还请注意两点：①一元*n*次方程最多有*n*个根；②对于多个根，请务必要检验，防止产生增根.

**例5：**解关于*x*的方程(*x*-2)4-3*x*2+12*x*-16=0.

**解：**(*x*-2)4-3(*x*2-4*x*)-16=0

(*x*-2)4-3(*x*2-4*x*+4-4)-16=0

(*x*-2)4-3(*x*-2)2+12-16=0

(*x*-2)4-3(*x*-2)2-4=0

设(*x*-2)2=*y*，则原方程转化为新元*y*的方程*y*2-3*y*-4=0

(*y*-4)(*y*+1)=0得*y*-4=0或*y*+1=0，*y*1=4，*y*2=-1

当*y*=4时，(*x*-2)2=4，*x*1=4，*x*2=0；

当*y*=-1时，(*x*-2)2=-1，因为(*x*-2)2≥0，所以方程无实数解。

故原方程的解是*x*1=4，*x*2=0。

**点拨：**观察方程的特点可知，经过变形后，可把(*x*-2)看作一个整体，原方程就可以看作关于(*x*-2)的双二次方程，用换元法把原方程降次为一元二次方程，求出新元后再回代。

**说明：**在解数学题时，需要有整体的思想。

**例6：**解方程(*x*-2)(*x*+1)(*x*+4)(*x*+7)=19.

**解：**把方程左边第一个因式与第四个因式相乘，第二个因式与第三个因式相乘，得

(*x*2+5*x*-14)(*x*2+5*x*+4)=19

设=*x*2+5*x*-5，

则(*y*-9)(*y*+9)=19；即*y*2-81=19，*y*1=10，*y*2=-10

当*y*=10时，*x*2+5*x*-5=10；*x*2+5*x*-15=0

当*y*=-10时，*x*2+5*x*-5=-10；*x*2+5*x*+5=0；

所以原方程的解是：*x*1，2=*x*3，4=

**点拨：**在解此题时，仔细观察方程中系数之间的特殊关系，则可用换元法解之(求平均数的方法设元，也可设*x*2+5*x*=*y*)

**【变式训练】**

解关于*x*的方程：(1)(*x*+1)(*x*+2)(*x*+3)(*x*+4)=24；

(2)

答案：(1)*x*=0或-5；(2)*x*=-2或1

**例7：**解方程(*x*+3)4+(*x*+1)4=82.

由于左边括号内的两个二项式只相差一个常数，所以设=*x*+2，

于是原方程变为(*y*+1)4+(*y*-1)4=82

整理得*y*4+6*y*2-40=0

解这个方程，得*y*=±2，即*x*+2=±2。

解得原方程的根为*x*1=0，*x*2=-4。

**点拨：**本题通过换元，设*y*=*x*+2后，消去了未知数的奇次项，使方程变为易于求解的双二次方程。一般地，形如(*x*+*a*)4+(*x*+*b*)4=*c*的方程，可以用换元(设*y*=*x*+)的方法转化为双二次方程。

**例8：**解下列方程

(1)5*x*3=4*x*2； (2)2*x*3+*x*2-6*x*=0.

**[说明]** 只有方程整理成一边为零时，才能用因式分解法解方程.

**例9：**解方程*x*3-2*x*2-4*x*+8=0.

**解：**原方程可变形为

*x*2(*x*-2)-4(*x*-2)=0

(*x*-2)(*x*2-4)=0

(*x*-2)2(*x*+2)=0

所以*x*1=*x*2=2，*x*3=-2。

**点拨：**因式分解可以使方程降次。

归纳：

当*ad*=*bc*≠0时，形如*ax*3＋*bx*2＋*cx*＋*d*=0的方程可这样解决：

令，则*a*=*bk*，*c*=*dk*，于是方程*ax*3+*bx*2+*cx*+*d*=0

可化为 *bkx*3+*bx*2+*dkx*+*d*=0，

即 (*kx*+1)(*bx*2+*d*)=0．

**【变式训练】**

解下列方程：(1)*x*3-5*x*2+*x*-5=0； (2) 3*x*3-2*x*2+6*x*-4=0.

答案：(2)*x*=

**同步训练**

**一、填空题**

1.已知关于*x*的方程*x*4+*nx*3+2*x*2+(2*m*-1)*x*+2=0是双二次方程，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：；0

2.请写出有两个根为2、3且四次项系数为1的双二次方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(*x*2-4)(*x*2-9)=0

3.在括号内填上该方程的解的个数：

(1)2*x*4-*x*2=0( )； (2)3*x*4-4*x*2+2=0( )；

(3)2*x*4=16( )； (4)*x*4-5*x*2+6=0( ).

答案：(1)4；(2)0；(3)2；(4)4

4.在解方程时，设\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=*y*，原方程可变形为关于*y*的一元二次方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*2-5；*y*2-*y*-2=0

5.关于*x*的方程(*x*2-1)(*x*-2)=0的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*1，2=±1，*x*3=2

6.将方程*x*3-3*x*2+2*x*=0的左边因式分解，原方程可化为三个一次方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*=0；*x*-1=0；*x*-2=0

7.关于*x*的方程*x*4+10*x*2=6*x*3有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个实数根.

答案：2

8.关于*x*的方程*x*3-3*x*2=4*x*-12的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*1=3，*x*2，3=±2

**二、选择题**

9.以下关于双二次方程描述正确的个数是( ).

①双二次方程是高次方程； ②双二次方程有4个解；

③由于二项方程*x*4=4也是双二次方程，所以二项方程都是双二次方程.

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

答案：B

10.解方程(*x*+5)2-3*x*-15=0较简便的方法是( ).

(A)直接开平方法 (B)因式分解法 (C)配方法 (D)公式法

答案：B

**三、解答题**

11.解关于*x*的方程：

(1)2*x*4+*x*2-1=0；

答案：(1)*x*=±； (2)无解；(3)*x*=±；(4)*x*=±2

12.解关于*x*的方程：

答案：(1)*x*=-3，1，； (2)*x*=；(3)*x*=3，±2，-1；(4)*x*=0，，

13.解关于*x*的方程：

(1) (2)；

(3)9*x*4-25*x*2+20*x*-4=0； (4)*x*3-6=*x*(1-6*x*)；

(5)*x*3-4*x*(*x*-1)-16=0； (6)(*x*2-2)(*x*-1)=2；

(7) (8)

答案：(1)*x*=0或；(2)*x*=0或±3； (3)*x*=-2；(4)*x*=-6或±1；(5)*x*=4；(6)*x*=0，-1，2；(7)*x*1=*x*2=2，*x*3=-2；(8)*x*=0或

**【探索创新】**

方程3*x*3+*mx*+4*x*2=0的根不止一个且都不相等，则*m*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：<且*m*≠0